Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.В.05 Группы с условиями конечности

наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом

Направление подготовки / специальность

01.04.01 Математика

Направленность (профиль)

01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Форма обучения очная

Год набора 2022

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Программу составили

Доктор физико-математических наук, Профессор, Левчук Владимир Михайлович

должность, инициалы, фамилия

1 Цели и задачи изучения дисциплины

1.1 Цель преподавания дисциплины

Дисциплина "Группы с условиями конечности" представляет собой одну из основных специальных дисциплин при подготовке математиков по направлению Математика.

Изучение дисциплины базируется на материалах предшествующих естественно-научных дисциплин: высшей алгебры, аналитической геометрии, дискретной математики.

Целью преподавания дисциплины является ознакомление студентов с основными условиями конечности, используемыми в теории групп, а также формирование у них умений и навыков применения изученных условий конечности в доказательствах новых теорем и для построения примеров групп.

1.2 Задачи изучения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен приобрести знания, умения и навыки, необходимые для его профессиональной деятельности в качестве исследователя и преподавателя по специальности «Математика».

Специалист должен:

Знать: основные условия конечности в группах, классические примеры конечных и бесконечных групп, разделяющие классы групп, удовлетворяющие различным условиям конечности.

Уметь: применять полученные знания при исследовании новых примеров групп. Использовать специальную литературу, справочники, математические энциклопедии. Приобрести практические навыки самостоятельной работы при изучении групповых конструкций.

1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Запланированные результаты обучения по дисциплине
ПК-1: Способен применять в научно-исследовательской деятельности знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	
ПК-1.1: Обладает достаточными фундаментальными теоретическими и практическими знаниями математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий для проведения в конкретной	Какие исследовательские вопросы стоят в рамках данной дисциплины Самостоятельно освоить темы дисциплины, углубляющие и детализирующие содержание лекционных и семинарских занятий Методами решения задач и проблем, входящими в рамки данной дисциплины

области профессиональной деятельности	
ПК-1.2: Решает научные задачи в соответствии с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой	Основные теории становления и методы изучаемой дисциплины Применять знания и методы к решению задач в научно- исследовательской деятельности Основными методами и программными продуктами для достижения поставленной цели

1.4 Особенности реализации дисциплины

Язык реализации дисциплины: Русский.

Дисциплина (модуль) реализуется без применения ЭО и ДОТ.

2. Объем дисциплины (модуля)

Вид учебной работы	Всего, зачетных единиц (акад.час)	е 1
Контактная работа с преподавателем:	**0,72 (26)**	
занятия лекционного типа	0,22 (8)	
практические занятия	0,5 (18)	
Самостоятельная работа обучающихся:	**1,28 (46)**	
курсовое проектирование (КП)	Нет	
курсовая работа (КР)	Нет	

3 Содержание дисциплины (модуля)

3.1 Разделы дисциплины и виды занятий (тематический план занятий)

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="8">Контактная работа, ак. час.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">№ п/п</td><td rowspan="3">Модули, темы (разделы) дисциплины</td><td colspan="2" rowspan="2">Занятия лекционного типа</td><td colspan="4">Занятия семинарского типа</td><td colspan="2" rowspan="2">Самостоятельная работа, ак. час.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Семинары и/или Практические занятия</td><td colspan="2">Лабораторные работы и/или Практикумы</td></tr>
<tr><td>Всего</td><td>В том числе в ЭИОС</td><td>Всего</td><td>В том числе в ЭИОС</td><td>Всего</td><td>В том числе в ЭИОС</td><td>Всего</td><td>В том числе в ЭИОС</td></tr>
<tr><td colspan="10">1. Модуль I.</td></tr>
</table>

1. Исторические сведения. К определению группы. Тривиальные подгруппы. Циклические группы. Конечные и бесконечные группы. Порядок элемента. Смежные классы по подгруппе. Правые и левые смежные классы. Теорема Лагранжа. Следствие о порядках элементов. Теорема Пуанкаре о пересечении подгрупп конечного индекса. Лемма Неймана о существовании подгруппы конечного индекса. Нормальная подгруппа и фактор-группа. Простые группы. Подстановки. Симметрическая группа. Циклы. Длина цикла. Стабилизатор точки. Транзитивные группы. Теорема о разбиении множества на области транзитивности. Группа подстановок k-транзитивная, группа подстановок точно k-транзитивная. Подстановочные представления групп. Теорема Кэли. регулярное представление группы. Точное представление группы. Изоморфизм групп. Канонический изоморфизм. Гомоморфизм групп. Классы сопряженных элементов. Представители классов сопряженных элементов. Их свойства. Действие группы на классах сопряженных элементов. Орбиты. Пример одноэлементных классов. Произведение классов сопряженных элементов. Лемма Дицмана о конечном инвариантном множестве элементов. Теорема Шмидта о локальной конечности расширения локально конечной группы. Определение р-группы. Абелевы группы. Элементарные абелевы группы. Ранг элементарной абелевой группы. Теорема о строении конечной абелевой р-группы. Нильпотентные группы. Нильпотентность конечных р-групп. Нормализаторное условие. Подгруппа Фраттини. Свойства подгруппы Фраттини. Теорема о строении конечной р-группы с единственной подгруппой порядка р. Теорема Силова о максимальных р-подгруппах..	2 7							

	2. Свойства 2-групп. Определение инволюции. Группы порожденные двумя инволюциями — группы диэдра. Строение групп диэдра в конечном, четном и нечетном случаях, в бесконечном случае. Свойства конечных и бесконечных групп диэдра. Группа Клейна. Группа кватернионов. Обобщенная группа кватернионов. Классы сопряженных элементов в группах кватернионов. Нормализаторное условие в 2-группах. Теорема Шункова о 2-группах с единственной инволюцией. Нильпотентные и разрешимые группы. Нижний и верхний центральные ряды. Нормализаторное условие в нильпотентных группах. p-ранг произвольной группы. Определение разрешимой группы. Простая группа. Примеры разрешимых и нильпотентных групп. Теорема Файта-Томпсона о простоте группы нечетного порядка (без доказательства). Группы с конечными классами сопряженных элементов. Определение FC-радикала. Определение FC-группы. Группы без кручения. Теорема Шура об FC-группах без кручения. Локально нормальные группы. Строение FC-групп.	1							

	3. Конечные группы Фробениуса. Исторические сведения. Теорема Фробениуса. Пара Фробениуса. Простейшие примеры групп Фробениуса: симметрическая группа 3-й степени; знакопеременная группа 4-й степени; полупрямое произведение абелевой группы нечетного порядка и циклической группы 2-го порядка. Дополнительный (неинвариантный) множитель Фробениуса, инвариантный множитель Фробениуса. Другая терминология для групп Фробениуса: дополнение, нормальное или инвариантное дополнение, ядро. Доказательство теоремы Фробениуса в отдельных случаях. Теорема Жордана — частный случай теоремы Фробениуса. Теорема Бернсайда — теорема Фробениуса для неинвариантного множителя, содержащего инволюцию. Частный случай теоремы Грина. Теорема Бернсайда о подгруппах дополнения группы Фробениуса. Теорема Цассенхауза о дополнительном множителе. Нильпотентность ядра конечной группы Фробениуса (теорема Томпсона). Ограниченность ступени нильпотентности некоторой функцией от минимального простого делителя порядка неинвариантного множителя (теорема Хигмана). Свойства конечных групп Фробениуса.	1							

	4. Исторические сведения. К определению группы. Тривиальные подгруппы. Циклические группы. Конечные и бесконечные группы. Порядок элемента. Смежные классы по подгруппе. Правые и левые смежные классы. Теорема Лагранжа. Следствие о порядках элементов. Теорема Пуанкаре о пересечении подгрупп конечного индекса. Лемма Неймана о существовании подгруппы конечного индекса. Нормальная подгруппа и фактор-группа. Простые группы. Подстановки. Симметрическая группа. Циклы. Длина цикла. Стабилизатор точки. Транзитивные группы. Теорема о разбиении множества на области транзитивности. Группа подстановок k-транзитивная, группа подстановок точно k-транзитивная. Подстановочные представления групп. Теорема Кэли. регулярное представление группы. Точное представление группы. Изоморфизм групп. Канонический изоморфизм. Гомоморфизм групп. Классы сопряженных элементов. Представители классов сопряженных элементов. Их свойства. Действие группы на классах сопряженных элементов. Орбиты. Пример одноэлементных классов. Произведение классов сопряженных элементов. Лемма Дицмана о конечном инвариантном множестве элементов. Теорема Шмидта о локальной конечности расширения локально конечной группы. Определение p-группы. Абелевы группы. Элементарные абелевы группы. Ранг элементарной абелевой группы. Теорема о строении конечной абелевой p-группы. Нильпотентные группы. Нильпотентность конечных p-групп. Нормализаторное условие. Подгруппа Фраттини. Свойства подгруппы Фраттини. Теорема о строении конечной p-группы с единственной подгруппой порядка p. Теорема Силова о максимальных p-подгруппах..	10		2					

	5. Свойства 2-групп. Определение инволюции. Группы порожденные двумя инволюциями — группы диэдра. Строение групп диэдра в конечном, четном и нечетном случаях, в бесконечном случае. Свойства конечных и бесконечных групп диэдра. Группа Клейна. Группа кватернионов. Обобщенная группа кватернионов. Классы сопряженных элементов в группах кватернионов. Нормализаторное условие в 2-группах. Теорема Шункова о 2-группах с единственной инволюцией. Нильпотентные и разрешимые группы. Нижний и верхний центральные ряды. Нормализаторное условие в нильпотентных группах. p-ранг произвольной группы. Определение разрешимой группы. Простая группа. Примеры разрешимых и нильпотентных групп. Теорема Файта-Томпсона о простоте группы нечетного порядка (без доказательства). Группы с конечными классами сопряженных элементов. Определение FC-радикала. Определение FC-группы. Группы без кручения. Теорема Шура об FC-группах без кручения. Локально нормальные группы. Строение FC-групп.			2					

6. Конечные группы Фробениуса. Исторические сведения. Теорема Фробениуса. Пара Фробениуса. Простейшие примеры групп Фробениуса: симметрическая группа 3-й степени; знакопеременная группа 4-й степени; полупрямое произведение абелевой группы нечетного порядка и циклической группы 2-го порядка. Дополнительный (неинвариантный) множитель Фробениуса, инвариантный множитель Фробениуса. Другая терминология для групп Фробениуса: дополнение, нормальное или инвариантное дополнение, ядро. Доказательство теоремы Фробениуса в отдельных случаях. Теорема Жордана — частный случай теоремы Фробениуса. Теорема Бернсайда — теорема Фробениуса для неинвариантного множителя, содержащего инволюцию. Частный случай теоремы Грина. Теорема Бернсайда о подгруппах дополнения группы Фробениуса. Теорема Цассенхауза о дополнительном множителе. Нильпотентность ядра конечной группы Фробениуса (теорема Томпсона). Ограниченность ступени нильпотентности некоторой функцией от минимального простого делителя порядка неинвариантного множителя (теорема Хигмана). Свойства конечных групп Фробениуса.			2					
7. Модуль I.							15	
2. Модуль II.								

	1. Определение квазициклической группы. Пример квазициклической группы. Свойства квазициклической группы: отсутствие подгрупп конечного Индекса, конечность всех собственных подгрупп, невыполнимость условия максимальности, выполнимость условия минимальности, локальная цикличность, полнота. Полные абелевы группы. Теорема о выделении полной собственной подгруппы прямым сомножителем. Сплетение. Пример сплетения квазициклической группы при помощи циклической группы простого порядка. Определение черниковской группы. Полная часть черниковской группы. Определение р-полной части группы. Свойства черниковских групп: строение полной части, сопряженность силовских примарных подгрупп, выполнимость условия минимальности. Выполнимость нормализаторного условия в примарной черниковской группе. Теорема Каргаполова о существовании бесконечной абелевой подгруппы. Теорема Мерзлякова о группах автоморфизмов прямых произведений квазициклических групп (без доказательства). Теорема Блекберна о локально конечных примарных группах. Теорема Шункова о локально конечной группе с условием минимальности для подгрупп.	1							

	2. Историческая справка. Определение и свойства групп Шмидта. Теорема Шмидта о не локально конечных группах с условием минимальности для подгрупп. Теорема Шмидта о примарных группах с условием минимальности для подгрупп. Теорема Шмидта о 2-группах с условием минимальности для подгрупп. Вопросы Шмидта. Квазичерниковские группы. Строение квазичерниковских групп. Классы групп Шункова. Теорема Шункова о нормализаторном условии в бесконечной бипримитивно конечной примарной группе. Свойства бесконечных бипримитивно конечных р-групп. Теоремы Шункова о сопряженности силовских примарных подгрупп в различных классах групп: в бесконечных бипримитивно конечных р-группах, в бесконечных р-бипримитивно конечных группах, в периодических группах, в бесконечных сопряжено р-бипримитивно конечных группах. Теорема Остыловского-Шункова о фактор-группах сопряжено бипримитивно конечных групп. Свойства квазичерниковской сопряжено бипримитивно конечной группы. Теорема Шункова о сопряжено бипримитивно конечных р-группах с условием минимальности для подгрупп.	1							

	3. Определение почти регулярной инволюции. Определение конечной инволюции. Определения совершенной и почти совершенной инволюций. Обобщение теорем В.П.Шункова и В.В.Беляева о группах с почти регулярной инволюцией. Теорема Шункова о периодических группах с почти регулярной инволюцией. Теорема Беляева о группах с конечной почти регулярной инволюцией. Усиление теоремы Шункова. Строение FC-радикала в периодической группе, содержащей почти регулярную инволюцию. Конечность FC-радикала в периодической группе, содержащей почти регулярную инволюцию. Существование в FC-радикале группы нормальной в самой группе, нильпотентной класса 2 подгруппы конечного индекса в периодической группе с почти регулярной инволюцией. Определение сильно изолированной подгруппы. Определение сильно вложенной подгруппы. Определение группы Цассенхауза. Подгруппа Бореля. Подгруппа Картана.	1							

	4. Определение квазициклической группы. Пример квазициклической группы. Свойства квазициклической группы: отсутствие подгрупп конечного Индекса, конечность всех собственных подгрупп, невыполнимость условия максимальности, выполнимость условия минимальности, локальная цикличность, полнота. Полные абелевы группы. Теорема о выделении полной собственной подгруппы прямым сомножителем. Сплетение. Пример сплетения квазициклической группы при помощи циклической группы простого порядка. Определение черниковской группы. Полная часть черниковской группы. Определение p-полной части группы. Свойства черниковских групп: строение полной части, сопряженность силовских примарных подгрупп, выполнимость условия минимальности. Выполнимость нормализаторного условия в примарной черниковской группе. Теорема Каргаполова о существовании бесконечной абелевой подгруппы. Теорема Мерзлякова о группах автоморфизмов прямых произведений квазициклических групп (без доказательства). Теорема Блекберна о локально конечных примарных группах. Теорема Шункова о локально конечной группе с условием минимальности для подгрупп.			2					

	5. Историческая справка. Определение и свойства групп Шмидта. Теорема Шмидта о не локально конечных группах с условием минимальности для подгрупп. Теорема Шмидта о примарных группах с условием минимальности для подгрупп. Теорема Шмидта о 2-группах с условием минимальности для подгрупп. Вопросы Шмидта. Квазичерниковские группы. Строение квазичерниковских групп. Классы групп Шункова. Теорема Шункова о нормализаторном условии в бесконечной бипримитивно конечной примарной группе. Свойства бесконечных бипримитивно конечных p-групп. Теоремы Шункова о сопряженности силовских примарных подгрупп в различных классах групп: в бесконечных бипримитивно конечных p-группах, в бесконечных p-бипримитивно конечных группах, в периодических группах, в бесконечных сопряжено p-бипримитивно конечных группах. Теорема Остыловского-Шункова о фактор-группах сопряжено бипримитивно конечных групп. Свойства квазичерниковской сопряжено бипримитивно конечной группы. Теорема Шункова о сопряжено бипримитивно конечных p-группах с условием минимальности для подгрупп.			2					

6. Определение почти регулярной инволюции. Определение конечной инволюции. Определения совершенной и почти совершенной инволюций. Обобщение теорем В.П.Шункова и В.В.Беляева о группах с почти регулярной инволюцией. Теорема Шункова о периодических группах с почти регулярной инволюцией. Теорема Беляева о группах с конечной почти регулярной инволюцией. Усиление теоремы Шункова. Строение FC-радикала в периодической группе, содержащей почти регулярную инволюцию. Конечность FC-радикала в периодической группе, содержащей почти регулярную инволюцию. Существование в FC-радикале группы нормальной в самой группе, нильпотентной класса 2 подгруппы конечного индекса в периодической группе с почти регулярной инволюцией. Определение сильно изолированной подгруппы. Определение сильно вложенной подгруппы. Определение группы Цассенхауза. Подгруппа Бореля. Подгруппа Картана.			2					
7. Модуль II.							15	
3. Модуль III.								

	1. Определение бесконечной группы Фробениуса. Примеры групп, показывающие независимость всех условий определения бесконечной группы Фробениуса. Теорема Горчакова о группах с локально конечной обособленной подгруппой (о группах Фробениуса). Результат В.В.Блудова о строении ядра группы Фробениуса (о том, что любая группа может быть вложена в ядро подходящей группы Фробениуса). Примеры групп, обладающих парой Фробениуса, но не являющихся группами Фробениуса, основанные на конструкциях периодических не локально конечных групп Ольшанского и Новикова-Адяна. Пример свободной двупорожденной группы. Пример свободного произведения произвольных неединичных групп. Элементарные свойства групп Фробениуса. Расположение нормальных подгрупп в группе Фробениуса. Другие подгруппы группы Фробениуса. Свойства группы Фробениуса с неинвариантным множителем, содержащим инволюцию. Свойства группы Фробениуса с неинвариантным множителем, содержащим элемент порядка три.	1							
	2.								

	3. Теорема Остыловского-Шункова о локальной конечности группы Шунковабез инволюций, удовлетворяющей условию минимальности для подгрупп. Вспомогательные результаты о подгруппах, обладающих полной частью. Представление групп линейными группами и группами лиева типа. Определение групп с BN-парой. Группы Шевалле. Параболические подгруппы в группах с BN-парой, решетка параболических подгрупп. Признак простоты группы с BN-парой. Историческая справка.	1							

	4. Определение бесконечной группы Фробениуса. Примеры групп, показывающие независимость всех условий определения бесконечной группы Фробениуса. Теорема Горчакова о группах с локально конечной обособленной подгруппой (о группах Фробениуса). Результат В.В.Блудова о строении ядра группы Фробениуса (о том, что любая группа может быть вложена в ядро подходящей группы Фробениуса). Примеры групп, обладающих парой Фробениуса, но не являющихся группами Фробениуса, основанные на конструкциях периодических не локально конечных групп Ольшанского и Новикова-Адяна. Пример свободной двупорожденной группы. Пример свободного произведения произвольных неединичных групп. Элементарные свойства групп Фробениуса. Расположение нормальных подгрупп в группе Фробениуса. Другие подгруппы группы Фробениуса. Свойства группы Фробениуса с неинвариантным множителем, содержащим инволюцию. Свойства группы Фробениуса с неинвариантным множителем, содержащим элемент порядка три.			2					

	5. Определение веера. Определение амальгамы. Почти правильный веер. Правильный веер. Полурешетка веера. Основная полурешетка веера. Основная подгруппа веера. Абелевы подгруппы в группах Шункова. Вееры конечных подгрупп. Ограниченные и правильные веера. Основные свойства вееров. Доказательство того, что почти все подгруппы правильного веера являются группами Фробениуса. Применение признаков непростоты и сведение задачи к группам Фробениуса. Достаточные условия существования бесконечных централизаторов и абелевых подгрупп. Теорема Шлепкина о существовании бесконечной абелевой подгруппы в бесконечной периодической сопряжено бипримитивно конечной группе. Теорема Остыловского-Шункова о локальной конечности группы Шунковабез инволюций, удовлетворяющей условию минимальности для подгрупп. Вспомогательные результаты о подгруппах, обладающих полной частью.			2					

6. Теорема Остыловского-Шункова о локальной конечности группы Шунковабез инволюций, удовлетворяющей условию минимальности для подгрупп. Вспомогательные результаты о подгруппах, обладающих полной частью. Представление групп линейными группами и группами лиева типа. Определение групп с BN-парой. Группы Шевалле. Параболические подгруппы в группах с BN-парой, решетка параболических подгрупп. Признак простоты группы с BN-парой. Историческая справка.			2					
7. Модуль III.							15	
Всего	9		18				45	

4 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

4.1 Печатные и электронные издания:

1. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп: учебное пособие(Санкт-Петербург: Лань).
2. Белоногов В. А. Задачник по теории групп: учебное пособие для вузов по специальности "Математика"(Москва: Наука).
3. Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П. Группы с системами фробениусовых подгрупп: монография(Красноярск: ИПЦ КГТУ).
4. Курош А. Г. Теория групп(Москва: Лань).
5. Шунков В. П., Мерзляков Ю. И. О вложении примарных элементов в группе: монография(Новосибирск: Наука. Сибирское отделение [СО]).
6. Богопольский О. В. Введение в теорию групп: монография(Ижевск: Институт компьютерных исследований).
7. Шунков В. П., Мерзляков Ю. И. Мр-группы: монография(Москва: Наука).
8. Рожков А. В. Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев: автореферат диссертации ... доктора физико-математических наук (Челябинск).
9. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах (Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.).
10. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах: монография (Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы [Физматлит]).
11. Сенашов В. И. Слойно конечные группы: монография(Новосибирск: Наука, Сиб. издат. фирма РАН).
12. Стейнберг Р., Кириллов А. А. Лекции о группах Шевалле: перевод с английского(Москва: Мир).
13. Шунков В. П., Рожков А. В. Т0-группы: [монография](Новосибирск: Наука, Сиб. издат. фирма РАН).
14. Левчук В. М. Алгебры и группы Шевалле и ассоциированные системы корней: учеб. пособие(Красноярск: Красноярский университет [КрасГУ]).
15. Сенашов В. И., Шунков В. П., Рожков А. В. Группы с условиями конечности: монография(Барнаул: Сибирское отделение РАН).

4.2 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства (программное обеспечение, на которое университет имеет лицензию, а также свободно распространяемое программное обеспечение):

1. Пакет Microsoft Office, ОС Windows XP/7/8/10, браузер Google Chrome/Opera/Mozilla Firefox,
2. информационные справочные системы: google.com, yandex.ru и т.д.

4.3 Интернет-ресурсы, включая профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Для самостоятельной работы у студентов должен быть доступ к электронному каталогу НБ СФУ.

5 Фонд оценочных средств

Оценочные средства находятся в приложении к рабочим программам дисциплин.

6 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Для проведения занятий требуется оборудованная доской аудитория.

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, в зависимости от нозологий, осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения.